

УДК 539.374.001.8

Чигиринский В. В.  
Матюхин А. Ю.**РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ  
ПОЛУОБРАТНЫМ МЕТОДОМ**

При аналитическом решении задач механики деформированного тела возникает необходимость определения постоянных или функций интегрирования, которые появляются в результате решения дифференциальных уравнений. Определяются они из граничных условий. Однако в прикладной теории пластичности граничные условия также неизвестны. Используют либо экспериментальные данные [1], либо, задаваясь законом контактного трения, данные, полученные теоретически [2]. Такой метод решения задач механики деформированного твердого тела называют полуобратным. В работах [3–5] предложен метод решения плоской задачи теории пластичности с использованием гармонических функций.

Целью работы – рассмотрение решения прикладных задач теории пластичности полуобратным методом.

Рассматривается плоская задача теории пластичности. Система уравнений в данном случае имеет вид [3–5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot K^2; \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}}; \\ \xi_x + \xi_y = 0; \\ \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_n = -k \cdot \sin(A\Phi - 2 \cdot \alpha); \\ \gamma_n = \beta \cdot \sin(B\Phi - 2 \cdot \alpha') \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma, \tau$  – нормальное и касательное напряжение;  $\tau_n$  – контактное касательное напряжение;  $\alpha$  – угол наклона площадки;  $K$  – сопротивление пластическому сдвигу;  $\gamma$  – сдвиговые составляющие тензора скоростей деформаций;  $A$  – постоянная величина, характеризующая тригонометрическую функцию для напряженного состояния пластической среды;  $B$  – постоянные величины, характеризующие аргументы тригонометрических функций для скоростей деформаций;  $\Phi$  – гармоническая функция, зависящая от координат очага деформации и являющаяся аргументом тригонометрической функции.

В систему входят два дифференциальных уравнения равновесия, условие пластичности Мизеса, физическое уравнение связи напряжений и скоростей деформаций, условие постоянства объема, дифференциальное уравнение неразрывности скоростей деформаций. Граничные условия на контакте заданы с использованием тригонометрических зависимостей [3].

Задача ставится одновременно и для напряжений и для скоростей деформаций.

Решения системы уравнений (1) с использованием граничных условий (2) приведено в работах [3–6].

$$\sigma_x = C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma + C,$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma + C, \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \sin A\Phi, \\ \xi_x &= -\xi_y = C_\xi \cdot \exp \theta' \cdot \cos B\Phi, \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2 \cdot C_\xi \cdot \exp \theta' \cdot \sin B\Phi,\end{aligned}\quad (3)$$

при  $\theta_x = -A\Phi_y$ ,  $\theta_y = A\Phi_x$ ,

$$\begin{aligned}\theta'_x &= -B\Phi_y, \quad \theta'_y = B\Phi_x, \\ \theta_{xx} + \theta_{yy} &= 0; \quad \theta'_{xx} + \theta'_{yy} = 0, \\ A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} &= 0; \quad B\Phi_{xx} + B\Phi_{yy} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

где  $\theta'$  – гармоническая функция, показатель экспоненты, характеризующая распределение сопротивления деформации сдвига в зоне обжатия;  $C_\sigma$  – постоянная величина, определяющая напряженного состояния пластической среды;  $C_\xi$  – постоянная величина, характеризующая поле скоростей деформаций;  $\xi$  – линейные составляющие тензора скоростей деформаций.

Из последующих соотношений следует, что функции  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $A\Phi$  и  $B\Phi$  являются гармоническими.

Рассмотрим решение задачи в напряжениях. Используя соотношения (4) можно получить для симметричного нагружения

$$\begin{aligned}A\Phi &= AA_6 \cdot x \cdot y, \\ \theta &= -\frac{1}{2} AA_6 (x^2 - y^2)\end{aligned}\quad (5)$$

С учетом условия пластичности и очевидных условий очага деформации для (3):

$$\sigma = -2C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi,$$

$$C_\sigma = \frac{k_0}{\cos A\Phi_0 \cdot \exp \theta_0}$$

$$\text{где } \theta_0 = -\frac{1}{2} AA_6 \left( \frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right), \quad A\Phi_0 = AA_6 \frac{l \cdot h}{4},$$

где  $h, l$  – высота и длина очага деформации при осадке заготовки;  $k_0$  – сопротивление пластическому сдвигу на контакте в начале очага деформации. С учетом последнего

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{2k_0} &= -\frac{1}{2 \cos A\Phi_0} \exp(\theta - \theta_0) \cdot \cos A\Phi - \frac{1}{2}, \\ \frac{\sigma_y}{2k_0} &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos A\Phi_0} \exp(\theta - \theta_0) \cdot \cos A\Phi - \frac{1}{2}, \\ \frac{\tau_{xy}}{k_0} &= \frac{1}{\cos A\Phi_0} \exp(\theta - \theta_0) \cdot \sin A\Phi.\end{aligned}\quad (6)$$

Для численного подсчета напряжений необходимо знать постоянную  $AA_6$ . В работах [2, 7] показана графическая зависимость среднего коэффициента подпора от фактора формы  $l/h$  и коэффициента трения. Ограничивающая кривая сверху может быть представлена выражением:

$$\frac{p}{\sigma_T^*} = 0,25 \frac{l}{h} + 1 \quad (7)$$

где  $p$  – среднее контактное напряжение,  $\sigma_T^*$  – предел текучести,  $\frac{p}{\sigma_T^*}$  – средний коэффициент подпора.

Если коэффициент трения не превышает 0,5, тогда можно записать:

$$\frac{p}{\sigma_T^*} = f(1-f)\frac{l}{h} + 1 \quad (8)$$

С учетом (6) для коэффициента подпора

$$\frac{\sigma_y}{2k_0} = \frac{1}{2} \left\{ 3 \frac{1}{\cos \Lambda \Phi_0} \cdot \exp \frac{1}{2} \Lambda \Lambda_6 \left[ \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right) - \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right] \cdot \cos \Lambda \Lambda_6 \cdot x \cdot y - 1 \right\}$$

Среднего коэффициента подпора на контакте

$$\frac{\sigma_{cp}}{2k_0} = \frac{\sigma_{max}}{4k_0} = \frac{1}{4} \left[ 3 \frac{1}{\cos \Lambda \Phi_0} \cdot \exp \left( \frac{1}{2} \Lambda \Lambda_6 \frac{l^2}{4} \right) - 1 \right], \quad (9)$$

где  $\sigma_{max}$  – максимальное значение контактного напряжения.

Приравнявая (8) и (9), имеем:

$$f(1-f)\frac{l}{h} + 1 = \frac{3}{4} \frac{1}{\cos \Lambda \Phi_0} \cdot \exp \left( \frac{1}{2} \Lambda \Lambda_6 \frac{l^2}{4} \right) - \frac{1}{4}, \text{ или}$$

$$\exp \left( \frac{1}{2} \Lambda \Lambda_6 \frac{l^2}{4} \right) = \frac{4}{3} \left[ f(1-f)\frac{l}{h} + 1,25 \right] \cdot \cos \Lambda \Phi_0.$$

Логарифмируя

$$\frac{1}{2} \Lambda \Lambda_6 \frac{l^2}{4} = \ln \left\{ \frac{4}{3} \left[ f(1-f)\frac{l}{h} + 1,25 \right] \cdot \cos \Lambda \Phi_0 \right\}.$$

Отсюда

$$\Lambda \Lambda_6 = 8 \frac{\ln \left\{ \frac{4}{3} \left[ f(1-f)\frac{l}{h} + 1,25 \right] \cdot \cos \Lambda \Phi_0 \right\}}{l^2}.$$

В первом приближении  $\cos \Lambda \Phi_0 \approx 1$ , тогда

$$\Lambda \Lambda_6 = 8 \frac{\ln \frac{4}{3} \left[ f(1-f)\frac{l}{h} + 1,25 \right]}{l^2}. \quad (10)$$

С учетом граничных условий:

$$\Lambda \Phi_0 = 2 \frac{\ln \frac{4}{3} \left[ f(1-f)\frac{l}{h} + 1,25 \right]}{l^2} \cdot \frac{l \cdot h}{4},$$

$$\Lambda \Phi_0 = \frac{2h}{l} \cdot \ln \frac{4}{3} \left[ f(1-f)\frac{l}{h} + 1,25 \right] \quad (11)$$

Используя выражения (6), (10), (11) были подсчитаны относительные контактные напряжения  $\frac{\sigma_y}{2k_0}$  и  $\frac{\tau_{xy}}{k_0}$  по длине очага деформации в зависимости от фактора формы  $l/h$  и коэффициента трения  $f$  (рис. 1, 2).

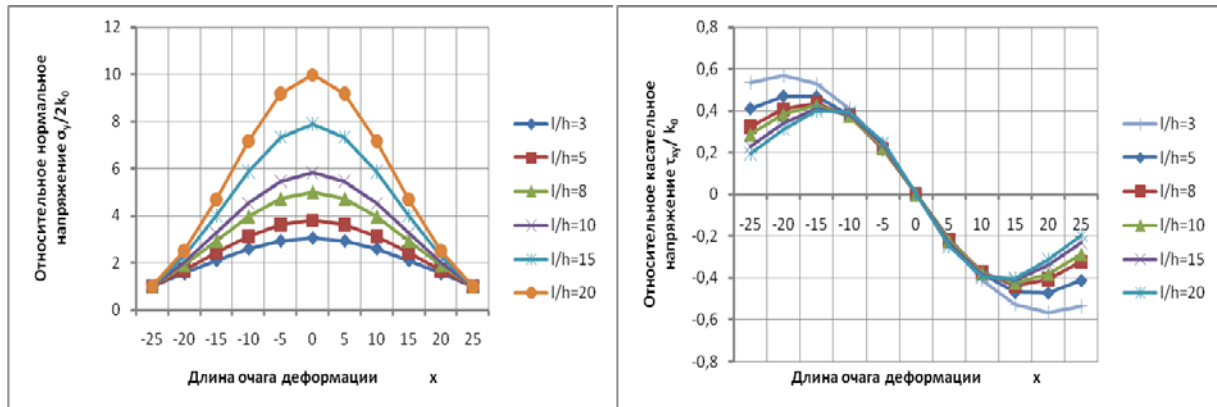


Рис. 1. Распределение нормальных и касательных контактных напряжений при коэффициенте трения  $f = 0,3$  и факторе формы  $l/h = 3, 5, 8, 10, 15, 20$

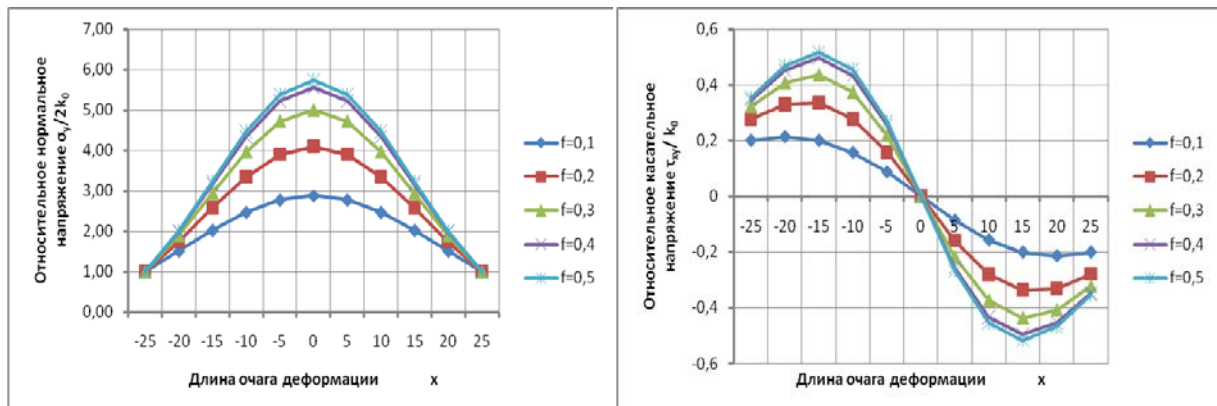


Рис. 2. Распределение нормальных и касательных контактных напряжений при факторе формы  $l/h = 8$  и коэффициенте трения  $f = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$

Анализируя вышеприведенные графики, можно сделать вывод о том, что с увеличением фактора формы и коэффициента трения увеличивается значение относительных контактных напряжений, что имеет место в реальных процессах при симметричном нагружении. Контактные напряжения качественно и количественно соответствуют общепринятым положениям механики деформированного тела. Эпюры нормальных напряжений соответствуют результатам работы [2].

Контактные касательные напряжения изменяются по тригонометрическому закону, в определенной степени являются обобщением подходов, изложенных в работах [1, 2].

Результаты работы [1], в данном случае, используются в виде граничных условий для определения постоянных в гармонических функциях, что позволяет определить область допустимых значений предложенного решения.

## ВЫВОДЫ

1. Решение задач теории пластичности полуобратным методом предполагает использование известных граничных условий (7).
2. Определена область допустимых значений в решении, которые позволяют качественно и количественно верно получить распределение напряжений в области пластического течения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарновский И. Я. Теория обработки металлов давлением / И. Я. Тарновский, А. А. Поздеев, О. А. Ганаго. – М. : Metallurgizdat, 1963. – 673 с.
2. Унксов Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением / Е. П. Унксов. – М. : Mashgiz, 1955. – 230 с.
3. Чигиринский В. В. Новый метод решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. – Запорожье, 2008. – № 1. – С. 57–62.
4. Чигиринский В. В. Некоторые особенности обобщенной теории пластичности для упрочняющейся среды / В. В. Чигиринский, А. Н. Бень // Вестник двигателестроения. – Запорожье : ОАО «Мотор-Сич», 2008. – № 2. – С. 8–12.
5. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В. В. Чигиринский // Известия вузов. Черная металлургия. – 2009. – № 5. – С. 11–16.
6. Современное производство колес автотранспортных средств и сельскохозяйственной техники : монография / В. В. Чигиринский, В. Л. Мазур [и др.]. – Днепропетровск : РИА «Днепр-VAL», 2010. – 309 с.
7. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 422 с.

## REFERENCES

1. Tarnovskij I. Ja. Teorija obrabotki metallov davleniem / I. Ja. Tarnovskij, A. A. Pozdeev, O. A. Ganago. – M. : Metallurgizdat, 1963. – 673 s.
2. Unksov E. P. Inzhenernye metody rascheta usilij pri obrabotke metallov davleniem / E. P. Unksov. – M. : Mashgiz, 1955. – 230 s.
3. Chigirinskij V. V. Novyj metod reshenija zadach teorii plastichnosti / V. V. Chigirinskij // Novye materialy i tehnologii v metallurgii i mashinostroenii. – Zaporozh'e, 2008. – № 1. – S. 57–62.
4. Chigirinskij V. V. Nekotorye osobennosti obobshhennoj teorii plastichnosti dlja uprochnjajushhejsja sredy / V. V. Chigirinskij, A. N. Ben' // Vestnik dvigatelestroenija. – Zaporozh'e : ОАО «Motor-Sich», 2008. – № 2. – S. 8–12.
5. Chigirinskij V. V. Metod reshenija zadach teorii plastichnosti s ispol'zovaniem garmonicheskikh funkcij / V. V. Chigirinskij // Izvestija vuzov. Chernaja metallurgija. – 2009. – № 5. – S. 11–16.
6. Sovremennoe proizvodstvo koles avtotransportnyh sredstv i sel'skohozjajstvennoj tehniki : monografija / V. V. Chigirinskij, V. L. Mazur [i dr.]. – Dnepropetrovsk : RIA «Dnepr-VAL», 2010. – 309 s.
7. Storozhev M. V. Teorija obrabotki metallov davleniem / M. V. Storozhev, E. A. Popov. – M. : Mashinostroenie, 1977. – 422 s.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. каф. ОМД ЗНТУ;

Матюхин А. Ю. – ст. преп. ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: mco2005@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 12.09.2015 г.